## 3. I componenti passivi lineari a regime sinusoidale

DIGITALE Scheda integrativa 8A.1 I componenti passivi

Per quanto detto nel precedente paragrafo, ogni tensione o corrente sinusoidale può essere interpretata, in modo simbolico, con un vettore il cui modulo corrisponde al valore efficace della grandezza stessa (concettualmente si dovrebbe fare riferimento al valore di picco ma convenzionalmente si preferisce usare quello efficace).
In questo paragrafo si descrive il comportamento a regime sinusoidale, sfruttando il metodo simbolico, dei *componenti lineari passivi e tempo-invarianti*.

### Il resistore

Lezione multimediale 8A.1

Poiché istante per istante risulta sempre verificata la legge di Ohm, si può scrivere:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_P}{R}\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) \qquad \text{12}$$

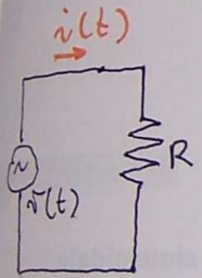
In un resistore corrente e tensione sono in fase.

Dalla **12** si deduce che *tensione e corrente sono in fase* e il valore di picco della corrente risulta:

$$I_P = \frac{V_P}{R} \qquad \text{13}$$

Usando i valori efficaci si può quindi scrivere:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{R} \quad \text{o anche più semplicemente } I = \frac{V}{R} \qquad \text{14}$$




L'ultima scrittura (che sottintende l'uso dei valori efficaci) è quella più usata e a essa ci atterremo nel seguito del testo.
In ultima analisi nei circuiti puramente resistivi, *se si usano i valori efficaci* (ma vale anche per i valori di picco), *è possibile procedere nei calcoli come se si operasse in continua*.
Più in generale, la **14** può essere scritta evidenziando la vettorialità della corrente e della tensione:

$$\boxed{\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R}} \qquad \text{15}$$

La **figura 8** sintetizza graficamente quanto appena esposto.

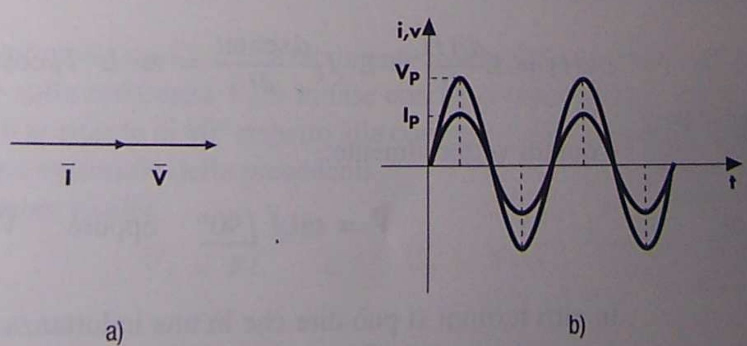



**Figura 8**
In una resistenza la tensione e la corrente sono in fase.

## Il condensatore

**Lezione multimediale 8A.2**

Ricordando il legame tensione-corrente in un condensatore, e supposta la tensione una sinusoide a fase nulla, si può scrivere:

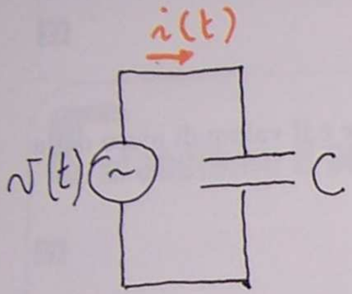
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = C \cdot V_P \frac{d\,\mathrm{sen}\,\omega t}{dt} = \omega \cdot C \cdot V_P \cos\omega t = \omega \cdot C \cdot V_P \,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \mathbf{16}$$

*In un condensatore a regime sinusoidale la corrente è in anticipo di 90° (π/2) rispetto alla tensione.*

Con le notazioni vettoriali la **16** risulta:

$$\bar{I} = \omega C \bar{V} \angle 90° \quad \text{oppure} \quad \bar{I} = j\omega C \bar{V} \quad \mathbf{17}$$

In altri termini si può dire che a regime sinusoidale la corrente che attraversa un condensatore *risulta sfasata di 90° in anticipo* rispetto alla tensione (**fig. 9**).



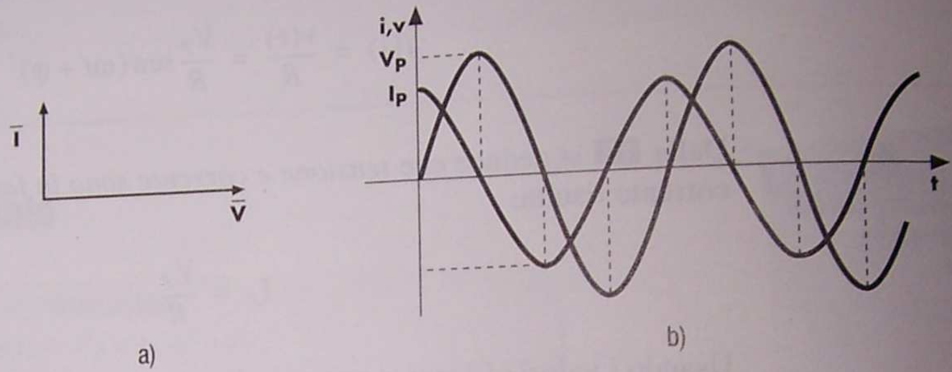




**Figura 9**
In un condensatore la corrente è in anticipo di 90° rispetto alla tensione.

Il rapporto:

$$\boxed{\bar{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C} \quad \mathbf{18}$$

**Reattanza capacitiva**

è una grandezza complessa chiamata **reattanza capacitiva**.
Se si esprime la **17** tenendo conto della **18** si ha:

$$\boxed{\bar{V} = \bar{X}_C \bar{I}} \quad \mathbf{19}$$

che esprime la **legge di Ohm in un condensatore a regime sinusoidale**.

## L'induttore

**Lezione multimediale 8A.1**

Analiticamente, se si suppone la corrente espressa da una sinusoide a fase nulla, risulta:

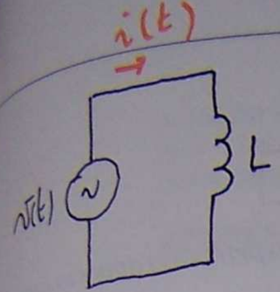
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L \cdot I_P \frac{d\,\mathrm{sen}\,\omega t}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_P \cos\omega t = \omega \cdot L \cdot I_P \,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \mathbf{20}$$

*In un induttore a regime sinusoidale la corrente è in ritardo di 90° (-π/2) rispetto alla tensione.*

e quindi vettorialmente:

$$\bar{V} = \omega L \bar{I} \angle 90° \quad \text{oppure} \quad \bar{V} = j\omega L \bar{I} \quad \mathbf{21}$$

In altri termini si può dire che in una induttanza *la corrente risulta sfasata di 90° in ritardo* rispetto alla tensione o, il che è lo stesso, è la tensione a essere sfasata in anticipo rispetto alla corrente (**fig. 10**).



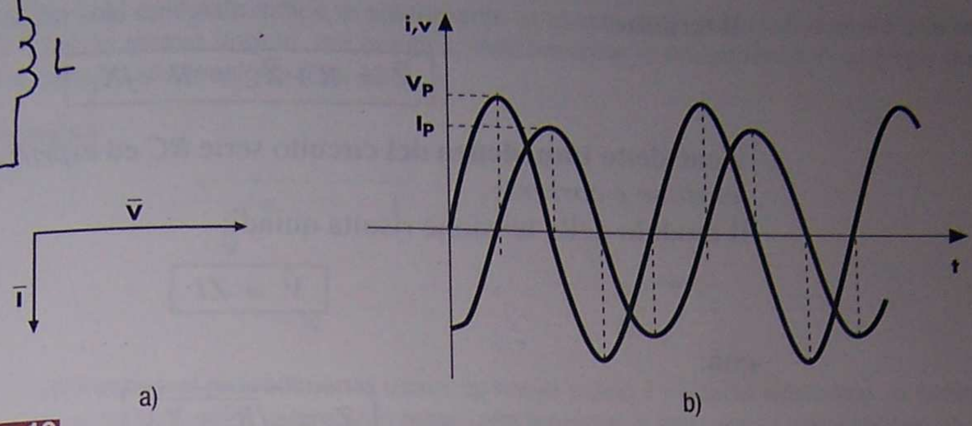




**Figura 10**
In una induttanza la corrente è in ritardo di 90° rispetto alla tensione.

Il termine:

$$\boxed{\overline{X_L} = j\omega L = jX_L} \qquad \mathbf{22}$$

Reattanza induttiva

viene detto **reattanza induttiva**. Se si tiene conto di quest'ultima definizione, la **21** diviene:

$$\boxed{\overline{V} = \overline{X_L}\,\overline{I}} \qquad \mathbf{23}$$

che esprime la **legge di Ohm in un induttore a regime sinusoidale**.

## 4. Circuiti serie

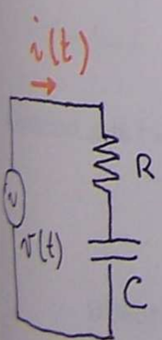
8A.2

Per lo studio dei circuiti lineari in regime sinusoidale si deve tenere presente che *è possibile ricorrere ai principi e ai teoremi già usati nei circuiti puramente resistivi, pur di sostituire ai valori istantanei delle grandezze i corrispondenti valori vettoriali*.

### Circuiti *RC* serie

8A.1

Poiché in un circuito serie la grandezza comune è la corrente, per il disegno del grafico vettoriale conviene porre sull'asse di riferimento la corrente (**fig. 11**).



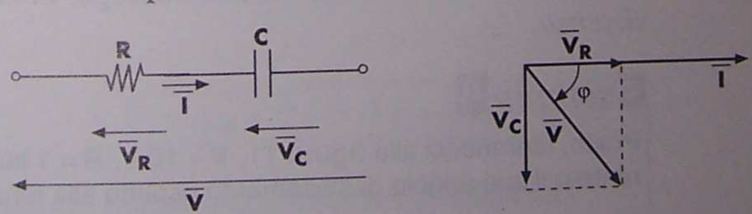




**Figura 11**
Circuito *RC* serie.

Il grafico vettoriale qualitativo è facilmente realizzabile se si tiene poi presente che la tensione sulla resistenza $\overline{V_R}$ è in fase con la corrente mentre quella sul condensatore $\overline{V_C}$ è in ritardo di 90° rispetto alla corrente e che la tensione totale $\overline{V}$ risulta dalla somma vettoriale delle precedenti.
Analiticamente risulta:

$$\overline{V_R} = R\overline{I} \qquad \text{e} \qquad \overline{V_C} = \overline{X_C}\,\overline{I} = -jX_C\overline{I} \qquad \mathbf{24}$$

e quindi:

$$\boxed{\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_C} = (R - jX_C)\overline{I} = \overline{Z}\,\overline{I}} \qquad \mathbf{25}$$

Il termine:

$$\boxed{\bar{Z} = R + \bar{X}_C = R - jX_C}$$ 26

viene detto **impedenza** del circuito serie *RC* ed *esprime il rapporto complesso tra tensione e corrente*.
Il modulo della tensione risulta quindi:

$$\boxed{V = ZI}$$ 27

con:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}}$$ 28

L'angolo di sfasamento risulta infine:

$$\boxed{\varphi = \text{arctg} \frac{-V_C}{V_R} = \text{arctg} \frac{-X_C}{R}}$$ 29

dove $-V_C$ e $-X_C$ rappresentano le componenti immaginarie (le reali sono nulle) dei corrispondenti vettori $\bar{V}_C$ e $\bar{X}_C$ e, analogamente, $V_R$ e $R$ rappresentano le parti reali (le immaginarie sono nulle) di $\bar{V}_R$ e $\bar{R}$.

Quanto appena esposto è generalizzabile dicendo che:

**Impedenza**

a regime sinusoidale il rapporto complesso tra la tensione e la corrente ai capi di un bipolo viene chiamato **impedenza**. Il suo modulo, essendo il rapporto tra una tensione e una corrente, si misura in ohm.

*A regime sinusoidale l'impedenza sostituisce la resistenza nella legge di Ohm.*

La definizione di impedenza permette di esprimere **la legge di Ohm** a regime sinusoidale:

$$\boxed{\bar{V} = \bar{Z}\bar{I}}$$ 30

Si può quindi *considerare la resistenza un caso particolare di impedenza priva di componente reattiva* e, in modo analogo, *la reattanza una impedenza priva di resistenza*.

## Esempio 4

Posto, riferendoci alla **figura 11**, $V = 10$ V, $R = 1$ kΩ, $C = 100$ nF, $f = 1$ kHz, calcolare la corrente e il suo angolo di sfasamento rispetto alla tensione.

Si calcola il modulo dell'impedenza:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \approx 1880\ \Omega \qquad \text{con} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \approx 1592\ \Omega$$

Si calcola il modulo della corrente:

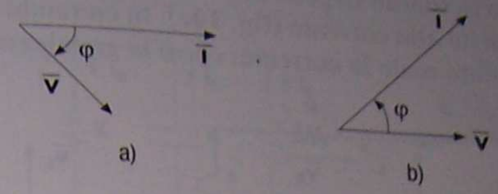
$$I = \frac{V}{Z} \approx 5{,}32 \text{ mA}$$

Risulta infine:

$$\varphi = \text{arctg}\left(-\frac{X_C}{R}\right) = -57{,}86°$$

L'angolo così calcolato indica lo sfasamento in ritardo della tensione rispetto alla corrente (**fig. 12a**); lo stesso angolo, ma positivo, indicherebbe lo sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione (**fig. 12b**).

**Figura 12**




Se, in alternativa al procedimento usato, si fosse usato il metodo simbolico, si poteva assegnare fase nulla (ovvero valore solo reale) alla tensione e ricavare la corrente tramite la legge di Ohm:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{10}{1000 - j1592} = \frac{10}{1880\angle{-57,86°}} \approx 5,32 \text{ mA} \angle{57,86°}$$

In questo caso l'angolo di sfasamento risulta positivo perché, avendo assegnata fase nulla alla tensione, il grafico vettoriale è quello di **figura 12b**.

## Circuiti *RL* serie

Si procede in modo analogo al caso precedente e quindi, fissata la corrente sull'asse reale, si ottiene il grafico di **figura 13**.

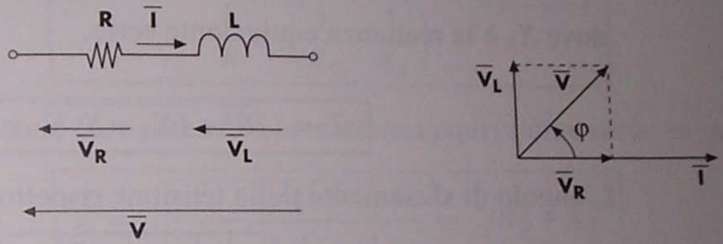
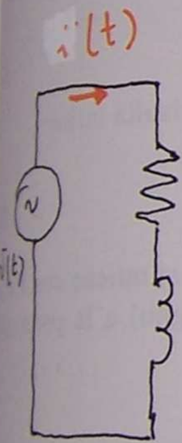



**Figura 13**
Il caso *RL* serie.




Analiticamente si ha:

$$\overline{V}_R = R\overline{I} \quad \text{e} \quad \overline{V}_L = jX_L\overline{I}$$ 31

e quindi:

$$\boxed{\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L = R\overline{I} + jX_L\overline{I} = \overline{Z}\overline{I}}$$ 32

con $\overline{Z}$ che esprime l'*impedenza* serie del circuito *RL*:

$$\boxed{\overline{Z} = R + \overline{X}_L = R + jX_L}$$ 33

Il modulo di questa impedenza risulta:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}}$$ 34

e l'angolo di sfasamento risulta:

$$\boxed{\varphi = \text{arctg}\frac{V_L}{V_R} = \text{arctg}\frac{X_L}{R}}$$ 35

## Circuiti *RLC* serie

In **figura 14** si sono considerate due possibilità: $X_C > X_L$ e quindi tensione complessiva in ritardo rispetto alla corrente (**fig. 14b**); $X_C < X_L$ e quindi tensione in anticipo rispetto alla corrente (**fig. 14c**). In entrambi i grafici vettoriali si è preso come riferimento reale la corrente, che è la grandezza comune.

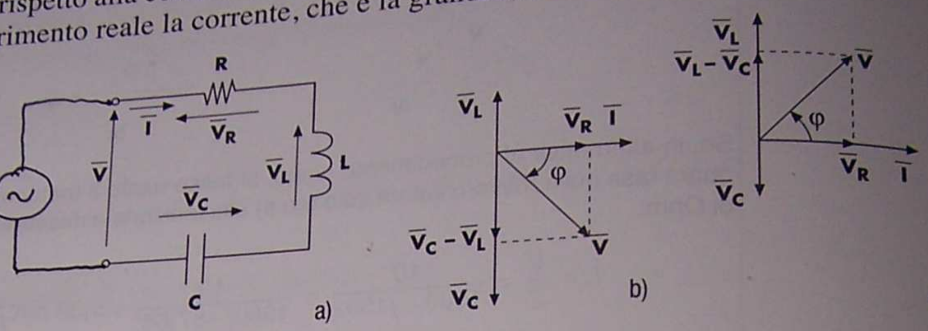



**Figura 14**
Il caso *RLC* serie.

Se risultasse $X_C = X_L$ il circuito si comporterebbe come fosse puramente resistivo e quindi tensione e corrente risulterebbero in fase: è il caso della cosiddetta **risonanza serie**. Analiticamente risulta:

$$\boxed{\overline{V} = \overline{Z}\overline{I} = R\overline{I} + jX_L\overline{I} - jX_C\overline{I}} \quad (36)$$

con:

$$\boxed{\overline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R \pm jX_E} \quad (37)$$

dove $X_E$ è la reattanza equivalente serie,
e:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_E^2}} \quad (38)$$

L'angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente risulta infine:

$$\boxed{\varphi = \text{arctg}\,\frac{(X_L - X_C)}{R}} \quad (39)$$

In pratica lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente si ottiene con l'arctg del rapporto tra la parte immaginaria (presa con il suo segno) e la parte reale dell'impedenza equivalente serie.

### Esempio 5

Posti, per il circuito di **figura 14**, $I = 100$ mA, $R = 2{,}2$ kΩ, $L = 100$ mH, $C = 330$ nF e $f = 500$ Hz, calcolare la tensione ai capi del circuito serie e l'angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente. Risulta:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 2294\ \Omega$$

con:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \approx 314\ \Omega \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \approx 965\ \Omega$$

e quindi:

$$V = ZI \approx 229{,}4\ \text{V}$$

L'angolo di sfasamento risulta infine:

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{(X_L - X_C)}{R} \approx -16{,}48°$$

Il fatto che risulti negativo vuole dire che la tensione è in ritardo rispetto alla corrente.
In alternativa si poteva risalire ai medesimi risultati con il metodo simbolico; infatti, supposta la corrente $I$ reale:

$$\overline{V} = \overline{Z}\overline{I} = 2294\underline{/-16{,}48°} \cdot 0{,}1\underline{/0°} = 229{,}4\underline{/-16{,}48°}$$